「統 計 学」小 テ ス ト

2007 年 7 月 18 日

1. $X_1, \cdots, X_n$ をパラメータ λ のポアソン分布からのランダム標本とする．このとき，λ の有効推定量が存在するか．存在する場合は，それを求めよ．また，$X_1, \cdots, X_n$ を成功確率 p のベルヌーイ分布からのランダム標本とするとき，p の有効推定量についても，存在する場合には，それを求めよ．

2. $X_1, \cdots, X_n$ を一様分布 $U(0, \theta)$ からのランダム標本とする．パラメータ θ の推定量として，標本平均 $\bar{X}$ を用いた不偏推定量と，標本最大値 $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$ を用いた不偏推定量を提案せよ．また，それぞれの推定量の分散を求め，両者の優劣を比較せよ．

3. $X_1, \cdots, X_n$ をパラメータ $1/\lambda$ の指数分布からのランダム標本とする．パラメータ λ の推定量として，標本平均 $\bar{X}$ を用いた不偏推定量と，標本最小値 $Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$ を用いた不偏推定量を提案せよ．また，それぞれの推定量の分散を求め，両者の優劣を比較せよ．

4. 確率変数 X と Y の同時密度関数が次のように与えられている．

$$f(x, y) = 8xy \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x)$$

このとき，X に基づく Y の最良予測量と最良線形予測量を求めよ．

5. ベイズ解とミニマックス解の定義を与えよ．

6. ネイマン＝ピアソンの定理の内容を述べよ．

1.
ポアソン分布：

$$\ell(\lambda) = \log f(x_1, \cdots, x_n) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)$$

$$= -n\lambda + \Sigma x_i \log\lambda - \Sigma \log x_i!$$

$$\ell'(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\Sigma x_i = \frac{n}{\lambda}\left(\frac{1}{n}\Sigma x_i - \lambda\right)$$

ここで，$\frac{n}{\lambda}$ は Fisher 情報量．

∴ クラメル＝ラオの定理から，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は有効．

ベルヌーイ分布：

$$\ell(\lambda) = \log f(x_1, \cdots, x_n) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right)$$

$$= \Sigma x_i \log p + (n - \Sigma x_i)\log(1-p)$$

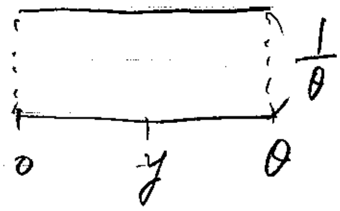
$$\ell'(\lambda) = \frac{1}{p}\Sigma x_i - \frac{1}{1-p}(n - \Sigma x_i)$$

$$= \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n(1-\bar{x})}{1-p} = \frac{n}{p(1-p)}(\bar{x} - p)$$

ここで，$\frac{n}{p(1-p)}$ は Fisher 情報量．

∴ クラメル＝ラオの定理から，$\overline{X}$ は有効．

2. $f(x) = \dfrac{1}{\theta} \quad (0 < x < \theta)$



$E(\bar{X}) = \dfrac{\theta}{2}$ より、 $T_1 = 2\bar{X}$ は不偏。

$V(T_1) = 4V(\bar{X}) = \dfrac{4}{n} \times \dfrac{\theta^2}{12} = \dfrac{\theta^2}{3n}$ //

$Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$ の分布は

$F_n(y) = P(Y \leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) = \left(\dfrac{y}{\theta}\right)^n$

∴ 密度は

$f_n(y) = \dfrac{n y^{n-1}}{\theta^n} \quad (0 < y < \theta)$

$E(Y) = \displaystyle\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} y^n \, dy = \frac{n}{n+1}\theta$

∴ $T_2 = \dfrac{n+1}{n} Y = \dfrac{n+1}{n} \max(X_1, \cdots, X_n)$ は不偏。

$E(Y^2) = \displaystyle\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} y^{n+1} \, dy = \frac{n\theta^2}{n+2}$

$V(Y) = \dfrac{n\theta^2}{n+2} - \dfrac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

∴ $V(T_2) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)} < V(T_1) = \dfrac{\theta^2}{3n}$

3. $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (0 < x < \infty)$

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = -x e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$= -\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^\infty = \lambda$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = -x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$= 2\lambda^2$$

$$\therefore V(X) = \lambda^2$$

$T_1 = \bar{X}$ は不偏. $V(T_1) = \frac{1}{n} V(X_i) = \frac{\lambda^2}{n}$ //

$Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$ の分布

$$1 - H_1(z) = P(Z > z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > z) = \prod_{i=1}^{n} \int_z^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$= e^{-\frac{nz}{\lambda}}$$

$$\therefore H_1(z) = 1 - e^{-\frac{nz}{\lambda}}$$

$\therefore$ 密度は $f_1(z) = \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{nz}{\lambda}} \sim Ex\left(\frac{n}{\lambda}\right)$

$E(Z) = \frac{\lambda}{n}$ $\therefore T_2 = nZ = n \min(X_1, \cdots, X_n)$ は不偏.

$$V(T_2) = n^2 V(Z) = \lambda^2 > V(T_1) = \frac{\lambda^2}{n}$$

最良予測:

4. $E(Y|x)=\int_0^x y\, f(y|x)\,dy$

ここで, $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{8xy}{\int_0^x 8xy\,dy}=\dfrac{2y}{x^2}$ であるから,

$(f_1(x)=4x^3)$

$$E(Y|x)=\int_0^y y\times\frac{2y}{x^2}\,dy=\frac{2}{3}x \quad /\!/$$

$$E(Y^2|x)=\int_0^y y^2\times\frac{2y}{x^2}\,dy=\frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
E[(Y-E(Y|X))^2] &= E[V(Y|X)]\\
&= E[E(Y^2|X)-E^2(Y|X)]\\
&= E\left[\frac{X^2}{2}-\frac{4X^2}{9}\right]=E\left(\frac{X^2}{18}\right)\\
&= \frac{1}{18}\int_0^1 4x^5\,dx=\frac{1}{27} \quad /\!/
\end{aligned}$$

最良線形予測:

上記の最良予測は, X の線形関数で与えられるから, 最良線形予測でもある. //